LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: FUENTE DE REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Dr. Angel Gutiérrez Rodríguez
Depto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia (Valencia, España)

1. Introducción.

Pretender describir con detalle en unas pocas páginas todos los aspectos que conforman la Didáctica de las Matemáticas sería una tarea imposible, similar a lo que ocurriría si se pretendiera, en el mismo espacio, describir qué son las Matemáticas y cuáles son sus característica y componentes. Por tanto, en este texto presentaré, en primer lugar, algunas ideas globales sobre la Didáctica de las Matemáticas tal como se concibe en la actualidad y, en las secciones siguientes, daré dos ejemplos concretos de algunos problemas por los cuales se interesa la Didáctica de las Matemáticas. La elección de estos ejemplos se debe sólo al interés por discutir situaciones que los profesores de enseñanza primaria y secundaria puedan sentir próximas a su actividad y que éstos conozcan porque hayan estado presentes en sus propias clases.

La Didáctica de las Matemáticas, como la entendemos hoy en día, nació entre los años cuarenta y cincuenta, aunque la preocupación por la enseñanza de las Matemáticas ha existido desde mucho tiempo antes. Recordemos a unos de los clásicos griegos, el Menón (Platón, 1970), en el cual un profesor (Sócrates) da una clase de Matemáticas a un estudiante (un esclavo), al tiempo que va explicando a otro filósofo (Menón) la metodología de enseñanza que utiliza. Este es un texto de Didáctica que tiene varios miles de años de antigüedad, en el cual se propugna un método de enseñanza, el método Socrático, que sigue siendo tenido en cuenta en la actualidad. La determinación de ese límite en la mitad del presente siglo se debe a que antes de los años cuarenta había personas aisladas que se preocupaban por la enseñanza de las Matemáticas, pero no había un cuerpo de conocimientos y unas metodologías de trabajo organizados y reconocidos de forma universal.

Como descripción totalmente general, y por lo tanto muy vaga, podemos decir que la Didáctica de las Matemáticas se interesa por todo aquello que influya en el aprendizaje y comprensión de las Matemáticas, no sólo en el contexto educativo, sino también fuera de él. Este interés da lugar a focos de atención bastante diversos, resumidos de forma no exhaustiva en la figura 1, que comentaré en los párrafos siguientes.

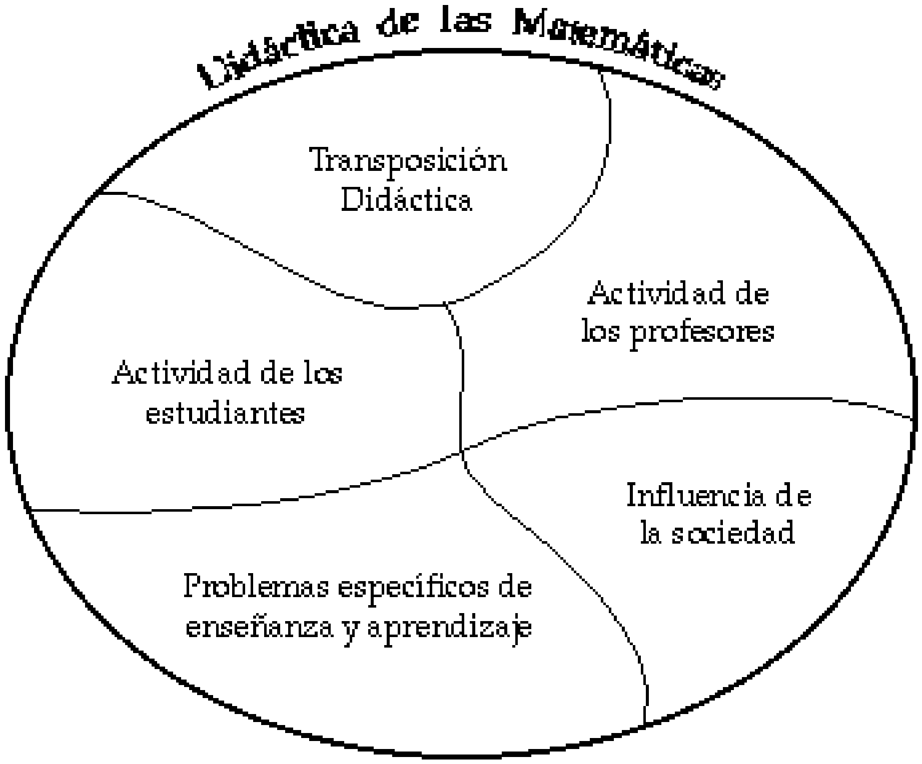


Figura 1. Algunos focos de interés de la Didáctica de las Matemáticas.

• Uno de ellos se centra en estudiar las relaciones entre las Matemáticas formales, las que hace un investigador, y las Matemáticas escolares, las que se enseñan en primaria, secundaria o la universidad. La principal diferencia entre ambas es debida a que el tipo de trabajo que hace un matemático profesional es muy distinto del que puede hacer un estudiante, especialmente en primaria y secundaria. Entonces, se produce una transformación de las Matemáticas "oficiales" para convertirlas en las Matemáticas "escolares", es decir de los contenidos y métodos reconocidos actualmente por la comunidad científica en los apropiados para determinado nivel educativo. Esta transformación se conoce con el nombre de "transposición didáctica" (Chevallard, 1985) y se refiere tanto a los contenidos matemáticos como a los métodos de trabajo:

- En los libros de texto, especialmente en primaria y secundaria, se presentan los resultados (definiciones, teoremas, demostraciones, etc.) de manera que sean apropiados a la capacidad de comprensión de los estudiantes. No es razonable, por ejemplo, introducir el conjunto de los números naturales a los estudiantes de primer grado de primaria mediante los axiomas de Peano, ni tampoco mediante los axiomas conjuntistas, si bien dichos axiomas están contenidos de manera implícita en los problemas que resuelven los niños y en las propiedades de los números que aprenden.

- Por otra parte, también es necesario reflexionar sobre las formas de trabajar (es decir de introducir y definir nuevos conceptos, demostrar propiedades, resolver problemas, etc.) tanto de profesores como de alumnos, para lograr un aprendizaje eficaz de dichos conocimientos, pues esas formas de trabajo deben ir formando, poco a poco, la destreza matemática de los estudiantes. Los métodos de trabajo que utiliza un matemático no se pueden llevar a las clases de primaria o secundaria; incluso en la universidad, sólo son adecuados para cursos especializados. Por lo tanto, las metodologías formales de los matemáticos se sustituyen por otras metodologías escolares, adaptaciones o transformaciones de las primeras, que pueden ser comprendidas y utilizadas por los estudiantes. Por ejemplo, la demostración por inducción se convierte en primaria en un estudio de algunos ejemplos particulares a partir de los cuales se deriva el resultado general.

• Como la mayor parte del aprendizaje de las Matemáticas se produce dentro de las aulas, estudiantes y profesores constituyen dos de los focos principales de interés de la Didáctica. Por una parte, es necesario observar a los estudiantes cuando están realizando algún tipo de trabajo de creación o descubrimiento matemático, analizando la actividad que son capaces de desarrollar y cómo evoluciona con el tiempo. Por otra parte, el análisis anterior nunca podrá ser completo ni fiable si no tiene en cuenta la intervención del profesor. Por ejemplo, la forma como el profesor entienda las Matemáticas se reflejará en la manera de organizar la actividad de sus alumnos. En un aula donde los estudiantes están creando Matemáticas, el profesor no puede ser un recitador del libro de texto o un conferenciante dando una clase magistral, sino que debe ser el encargado de organizar y guiar el trabajo de sus alumnos. Por lo tanto, la Didáctica de las Matemáticas está interesada en estudiar el comportamiento de los profesores y también en elaborar métodos de trabajo que puedan ser idóneos para cada tipo de profesor.

• Otro elemento que tiene influencia en el aprendizaje de las Matemáticas y que, por lo tanto, es relevante para la Didáctica, es la sociedad, tanto considerada en términos amplios, por ejemplo para comprender las diferencias entre los sistemas educativos de diferentes países o culturas, como considerada en términos microscópicos, para comprender la influencia ejercida por los padres, los compañeros de la sala de clase o los compañeros de juegos. Por ejemplo, muchas veces los juegos generan en los niños conocimientos y experiencias matemáticos inconscientes; así, al empezar a enseñar probabilidades en secundaria, no se puede pensar que los estudiantes no saben absolutamente nada de probabilidades, pues cualquier niño practica desde los cinco o seis años juegos de azar con dados, cartas, etc., por lo que adquiere sin darse cuenta una concepción del azar, la equiprobabilidad y otros conceptos relacionados, que pondrá en funcionamiento cuando empiece a estudiar este tema en la escuela.

• Un último centro de atención de la Didáctica de las Matemáticas, no menos importante que los anteriores, es el estudio de problemas específicos de enseñanza o aprendizaje que surgen en áreas concretas de las Matemáticas escolares. Estas están formadas por una serie de áreas, que unas veces están relacionadas y otras son bastante diferentes, cada una de ellas con su problemática específica: Aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidades, etc. Una de las fuentes de problemas que debe resolver la Didáctica de las Matemáticas es estudiar cada una de estas áreas, para tratar de determinar cómo se pueden mejorar las condiciones de aprendizaje de los estudiantes, qué se puede hacer para evitar que éstos se equivoquen en un problema dado o para lograr que superen mejor sus dificultades, o por qué hay momentos en los que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades. Ese tipo de estudios implica determinar cómo están organizadas las Matemáticas, cómo piensan los estudiantes, cómo están organizados los contenidos que se van a enseñar, y es una de las actividades a las que se dedican más tiempo y esfuerzos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas.

Otro punto de vista interesante para entender qué es la Didáctica de las Matemáticas es observarla en el contexto de otras Ciencias que tienen que ver con las Matemáticas y con la Educación, pues la Didáctica no es un área del conocimiento aislada. La figura 2 esquematiza las principales relaciones.

La Didáctica de las Matemáticas tiene sus fuentes principales en tres áreas que se interesan de forma destacada por la enseñanza de las Matemáticas (parte superior de la figura 2), cada una de ellas con sus peculiaridades que la diferencian de las otras: En primer lugar, naturalmente, las Matemáticas. Buena parte de los didactas son matemáticos que han sentido la inquietud por los problemas didácticos, pero cuya formación inicial como matemáticos les proporciona un cierto punto de vista, una forma de entender dichos problemas. Otro grupo de didactas son psicólogos que, desde la perspectiva de la Psicología, se preocupan por los problemas de aprendizaje de las Matemáticas. Y un tercer grupo son los pedagogos, que también, desde sus propias concepciones de la problemática educativa, aportan ideas sobre cómo analizar los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. De la unión de estas tres posturas, junto a modelizaciones autónomas que no se derivan directamente de ninguno de los tres campos anteriores, surge el campo de estudio de la Didáctica de la Matemáticas, que tiene un carácter propio e independiente.

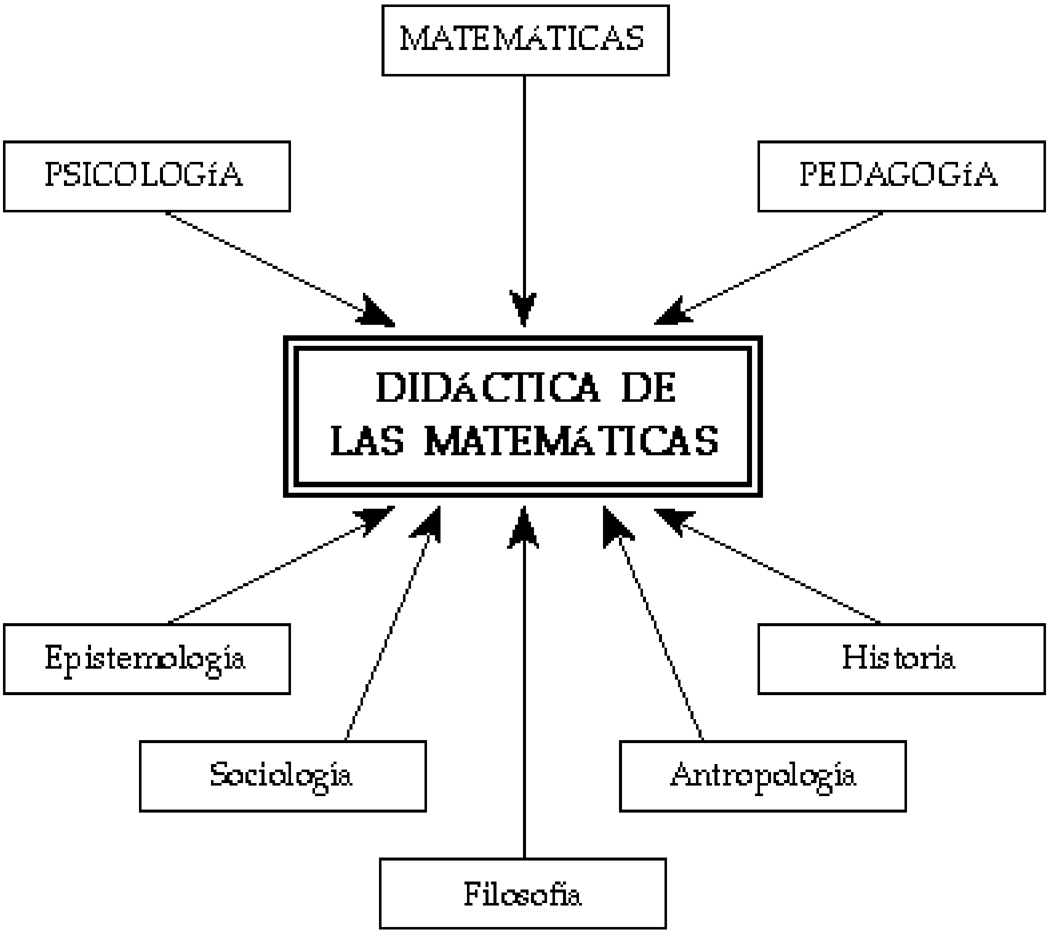


Figura 2. La Didáctica de las Matemáticas relacionada con otras Ciencias.

Pero también hay otras Ciencias que ayudan a entender algunos tipos de problemas de la Didáctica de las Matemáticas (la parte inferior de la figura 2 recoge las principales, aunque no todas). Por ejemplo, la Historia de las Matemáticas nos muestra cómo se han desarrollado los conceptos matemáticos a lo largo de los siglos, y su conocimiento sirve en Didáctica para analizar y explicar por qué los estudiantes tienen dificultades en determinados momentos de su proceso de aprendizaje de esos mismos conceptos. La Epistemología puede verse como un complemento de la Historia, ya que nos ayuda a comprender la evolución de la forma como los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos pues, con el tiempo, han ido cambiando de forma análoga los significados de esos términos. Por otra parte, como uno de los focos de interés de la Didáctica es estudiar la influencia de diversos elementos de la sociedad en el aprendizaje de las Matemáticas (profesores, otros alumnos, padres, juegos, etc.), la Sociología y la Antropología se deben tener en cuenta al adentrarse en esa parte específica de la Didáctica. Comentarios análogos se pueden hacer respecto de la Filosofía o algunas otras Ciencias.

2. Análisis de la suma y la resta de números naturales.

Uno de los temas básicos de la enseñanza primaria en cualquier país del mundo es el de las operaciones aritméticas con números naturales, en particular la suma y la resta. Todos recordamos las canciones de las tablas de sumar y las largas listas de sumas y restas que de niños tuvimos que resolver. Esos conocimientos siguen siendo el núcleo básico del aprendizaje de la suma y de la resta, aunque la metodología de enseñanza ha cambiado y, actualmente, no se hace énfasis sólo en la componente memorística, sino que también se trabaja en resolución de problemas de sumas y restas. Cuando hablo de "problemas" me estoy refiriendo a enunciados verbales que los niños tienen que entender, interpretar y traducir a una determinada operación; no me estoy refiriendo, por tanto, a ejercicios en los que se plantean explícitamente operaciones como 538 + 256 y en los que sólo hace falta aplicar el algoritmo correspondiente.

Una cuestión sobre la que es interesante reflexionar, desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas, es si todos los problemas de sumar o restar son iguales, se resuelven igual. Los problemas elementales de sumas o restas que se plantean en los primeros cursos de primaria se resuelven siempre sumando o restando dos números, luego matemáticamente son todos iguales. Pero, aparte de la operación que se realiza, hay otro elemento importante al pensar en los problemas aritméticos: Que esos problemas deben tener alguna carga conceptual. El objetivo de los problemas debe ser transmitir los significados de la suma y la resta para que los niños entiendan bien estas operaciones. Es decir, que un niño aprenda bien a sumar y restar no es simplemente que sepa las tablas y que sepa operar con varios números de muchas cifras, sino que, cuando encuentre un problema en el cual no está la operación explícita, sepa ver que hay una operación y cuál es. Esas situaciones son diversas y conviene reflexionar sobre qué tipos de problemas hay que presentarles a los niños, para que sean variados y que reflejen las diferentes características conceptuales de la suma y de la resta, sus propiedades, relaciones, etc.

Los problemas elementales (de una sola operación) de sumas y de restas de enunciados verbales plantean situaciones en las cuales hay una determinada actividad que, en último término, se traduce en una suma o una resta. Podemos distinguir cuatro tipos de problemas (Carpenter, Moser, 1983) esquematizados en la figura 3.

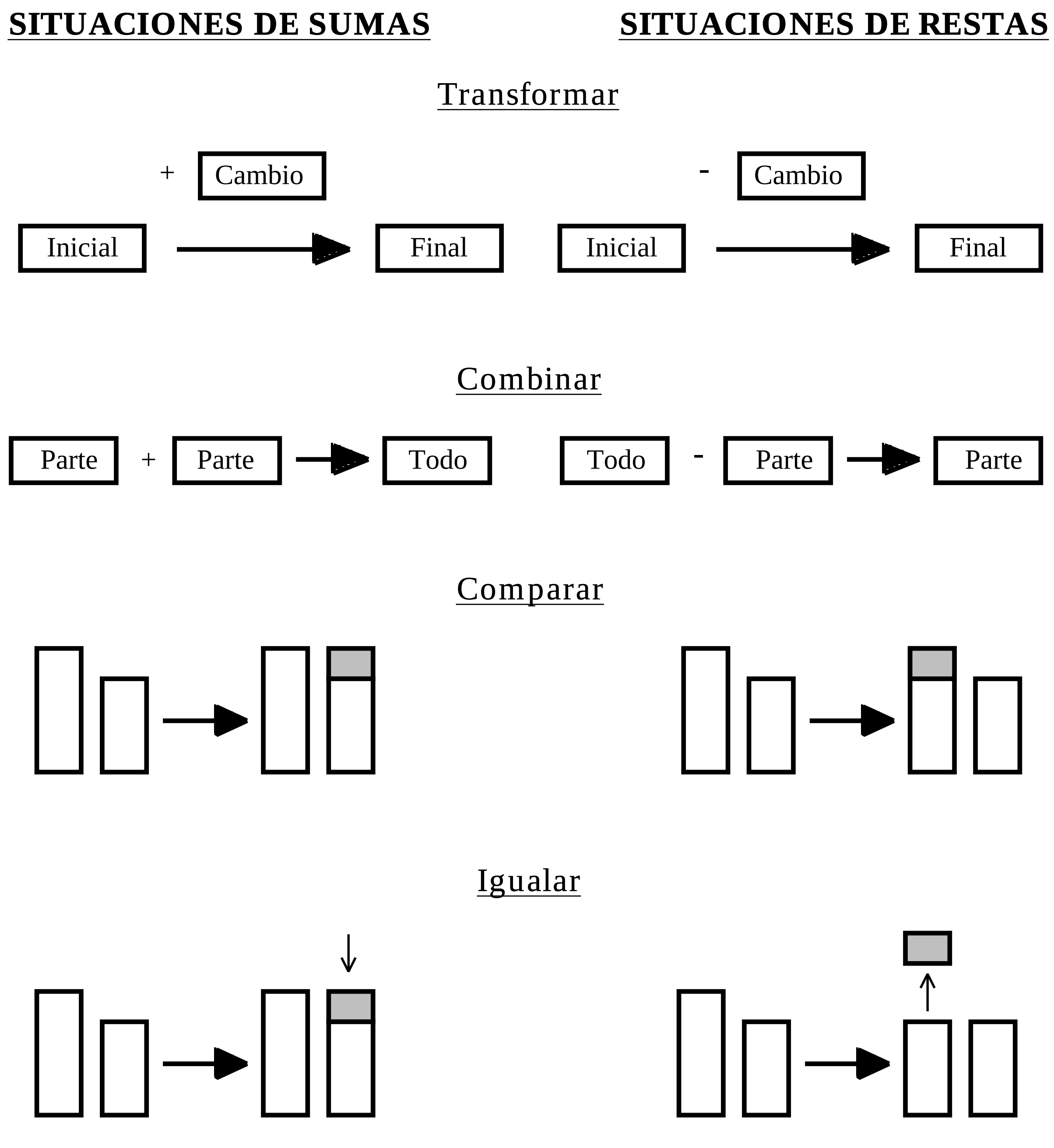


Figura 3. Tipos de problemas de sumas y restas.

• El primer tipo, el más frecuente, son los problemas de transformar, en los cuales hay una cantidad inicial de objetos, una transformación, que implica que la cantidad de objetos crece en el caso de las sumas y disminuye en el caso de las restas, y una cantidad final de objetos. En la figura 4 pueden verse ejemplos de las tres formas posibles de enunciados, para la suma y la resta, dependiendo de qué valor sea desconocido. Comparando los tres problemas de cada columna, se puede distinguir entre los aspectos conceptuales y algorítmicos a que aludía antes: Los tres problemas de la columna izquierda [derecha] presentan situaciones de suma [resta], pues en todos ellos hay una cantidad inicial que ha sido incrementada [disminuida], pero, para calcular el resultado, en el primer problema de la columna de la izquierda [derecha] se realiza una suma [resta], mientras que en los otros dos problemas de la misma columna lo usual es hacer una resta [suma].

• Otro tipo de problemas son los problemas de combinar. En estos problemas hay dos cantidades que unas veces se juntan y otras veces se separan. En unos casos conocemos cada una de estas dos cantidades, y lo que interesa es saber cuál es la cantidad total, mientras que en otros casos conocemos la cantidad total y una de las partes, siendo el problema averiguar la otra parte. La diferencia básica entre los problemas de transformar y los de combinar estriba en que en los primeros hay una modificación, una acción de cambio de tamaño de una cantidad, mientras que en los problemas de combinar no hay ninguna modificación, sino dos maneras de mirar esas cantidades (juntas o separadas), que no se transforman.

En la figura 4 presentamos un ejemplo de problema de combinar de suma y otro de resta. La variedad de problemas, en función de qué cantidad es desconocida, es análoga a la de los problemas de transformar, por lo que se podrían repetir aquí (y también para los dos tipos de problemas restantes) los comentarios hechos en el párrafo anterior.

• El tercer tipo de problemas son los problemas de comparar. En estos problemas, que aparecen con bastante frecuencia, se plantean, por ejemplo, situaciones de competición: Un niño tiene una cantidad de objetos mayor que otro niño y se quiere averiguar cuántos objetos más tiene el primero que el segundo, o cuánto objetos menos tiene el segundo que el primero. A diferencia de los problemas de transformar, ahora no se modifica el tamaño de las cantidades que se manejan. Y a diferencia de los problemas de combinar, ahora no hay un total dividido explícitamente en dos partes. Estas diferencias quedan claramente reflejadas por los problemas de la figura 4.

Al leer los enunciados de los problemas de comparar de la figura 4 puede parecer que están equivocados: El hecho de que aparezca la palabra "más" en el enunciado de la columna de los problemas de restas y la palabra "menos" en el enunciado de la columna de los problemas de sumas podría llevarnos a pensar que están al revés. En realidad, lo que clasifica a estos dos problemas como de sumas o de restas es cómo los interpreta cada estudiante concreto. Así, un estudiante puede resolver el problema de la columna de sumas poniendo caramelos en el montón de Ana, hasta que haya tantos como en el de Juan, mientras que otro estudiante puede resolver el mismo problema cogiendo caramelos del montón de Juan hasta que

PROBLEMAS DE SUMAS	PROBLEMAS DE RESTAS
Transformar	
$3 + 5 = \boxed{}$ Juan tenía 3 manzanas. Ana le ha dado otras 5 manzanas. ¿Cuántas tiene Juan ahora?	$8 - 5 = \boxed{}$ Juan tenía 8 manzanas. Ana le ha cogido 5 manzanas. ¿Cuántas tiene Juan ahora?
$3 + \boxed{} = 8$ Juan tenía 3 manzanas. Ana le ha dado algunas más. Ahora Juan tiene 8 manzanas. ¿Cuántas le ha dado Ana?	$8 - \boxed{} = 3$ Juan tenía 8 manzanas. Ana le ha cogido varias. Ahora Juan tiene 3 manzanas. ¿Cuántas le ha cogido Ana?
$\boxed{} + 5 = 8$ Ana le ha dado 5 manzanas a Juan. Ahora Juan tiene 8 manzanas. ¿Cuántas tenía Juan al principio?	$\boxed{} - 5 = 3$ Ana le ha cogido 5 manzanas a Juan. Ahora Juan tiene 3 manzanas. ¿Cuántas tenía Juan al principio?
Combinar	
Juan tiene 3 caramelos de fresa y 5 caramelos de naranja. ¿Cuántos caramelos tiene Juan en total?	Juan tiene 8 caramelos. De ellos, 5 son de fresa y los demás son de naranja. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene?
Comparar	
Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene menos Ana que Juan?	Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene más Juan que Ana?
Igualar	
Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay que darle a Ana para que tenga tantos como Juan?	Juan tiene 8 caramelos. Ana tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay que cogerle a Juan para que tenga tantos como Ana?

Figura 4. Ejemplos de problemas de sumas y restas.

queden tantos como en el de Ana. En el primer caso sería un problema de sumas y en el segundo caso sería un problema de restas.

Se trata, no obstante, de una peculiaridad de este tipo de problemas, que desde el punto de vista de una clasificación formal son ambiguos, pero que para un profesor que está en su escuela con sus alumnos no es importante, porque lo que le importa en último término es que los niños entiendan estas situaciones y las resuelvan correctamente. Si planteamos, por ejemplo, el problema de $3 + \boxed{} = 8$, los niños de los primeros cursos de primaria, que seguramente todavía están contando con los dedos de las manos, van a resolverlo contando con los dedos desde 3 hasta 8, por lo que han hecho una suma. Sin embargo los niños de los cursos intermedios o superiores de la primaria, que ya dominan bien las operaciones, harán mentalmente la resta $8 - 3 = 5$, porque son capaces de relacionar la suma y la resta, cosa que los niños más pequeños no saben hacer.

• El cuarto tipo de problemas son los <u>problemas de igualar</u>. Son problemas en los cuales se presentan dos cantidades de objetos y se pide averiguar cuánto hace falta añadir a una para tener tantos objetos como en la otra, o cuánto hay que quitar de una para tener tantos como en la otra. Existe una clara relación entre los problemas de comparar y los de igualar (ver los ejemplos de la figura 4), pero, una vez más, la diferencia es de tipo semántico: En un caso se plantea una comparación, con lo cual no hay ninguna transformación de las cantidades. En el otro caso se plantea una acción de equilibrar las dos cantidades, por lo que sí se sugiere la realización de una modificación de una de dichas cantidades. Realmente, los problemas de igualar están integrados por una componente de comparar y otra componente de transformar.

Al presentar los ejemplos de los problemas de transformar, me referí a la existencia de tres enunciados posibles, pues estamos manejando tres números, de los cuales uno es desconocido y los otros dos son conocidos. Es realmente muy fácil cambiar los planteamientos dentro del mismo esquema de problema de manera que, conceptualmente, el problema siga siendo el mismo, pero haya que averiguar una cantidad distinta. Sólo he planteado esta variedad de enunciados en el caso de los problemas de transformar, pero se puede hacer lo mismo con los enunciados de los otros tres tipos de problemas. El único tipo que no tiene tres variantes de enunciados son los problemas de combinar. Si observamos el problema de combinar de sumas (figura 4), la operación que plantea es $3 + 5 = \boxed{}$. El enunciado del problema correspondiente a $3 + \boxed{} = 8$ es: *Juan tiene 3 caramelos de fresa y varios de naranja. En total, tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene Juan?* Y el enunciado correspondiente a $\boxed{} + 5 = 8$ es: *Juan tiene varios caramelos de fresa y 5 de naranja. En total, tiene 8 caramelos. ¿Cuántos caramelos de naranja tiene Juan?* Pero, realmente, ambos enunciados son el mismo pues lo único que varía es el sabor de los caramelos, pero no la función de cada uno en la situación planteada.

En resumen, podemos ver que, desde el punto de vista algorítmico, la operación que se hace en todos los ejemplos de la figura 4 es la misma ($5 + 3 = 8$ ó $8 - 3 = 5$ ó $8 - 5 = 3$) pero, desde el punto de vista semántico, cada tipo de problemas es diferente de los demás, pues los problemas de combinar o de comparar presentan situaciones estáticas, mientras que los problemas de igualar o de transformar presentan situaciones dinámicas. Así pues, la componente conceptual que tienen los diferentes problemas para los niños es distinta, porque plantean actividades diferentes, es decir interpretaciones y significados diferentes de la misma operación. Por último, quiero señalar que está comprobado por infinidad de experiencias en todo el mundo que estos cuatro tipos de problemas presentan diversos grados de dificultad para los niños. El orden en el que los he presentado (transformar, combinar, comparar e igualar) se corresponde con un grado de dificultad creciente.

3. Reflexiones sobre el paso de la aritmética al álgebra.

El progreso que se produce en la enseñanza de los números y las operaciones aritméticas a lo largo de la primaria y secundaria tiene varias etapas importantes, como la aparición de las fracciones, los decimales o los números negativos. En todos estos se siguen manejando conjuntos numéricos y los estudiantes permanecen en el mundo de los números concretos, pero llega un momento en el que surge una situación radicalmente diferente, en la que esos números concretos son sustituidos por las letras y se entra de lleno en el estudio del álgebra. En infinidad de países, entre ellos España, la toma de contacto con el álgebra se produce al final de la primaria y se completa en los primeros cursos de la secundaria, donde se utilizan todo tipo de expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, etc., es decir cuando los estudiantes tienen entre 12 y 16 años.

Para la Didáctica de las Matemáticas es un problema importante analizar cómo se produce ese paso de las expresiones y operaciones concretas a las abstractas, qué procesos siguen los estudiantes en sus razonamientos durante ese paso, qué dificultades o errores surgen en cada momento, cuáles son sus causas y, en último término, conseguir que los estudiantes entiendan con la menor dificultad posible el significado y la forma de manejar esas letras que aparecen en unas expresiones análogas a las que siempre han estado utilizando, pero que ya no están formadas sólo por números.

En primer lugar, los profesores deben ser conscientes de que, para sus alumnos, las letras de las expresiones algebraicas no significan siempre lo mismo. También deben tener siempre presente que la forma como los estudiantes interpretan una letra en una expresión algebraica muchas veces no coincide con la que el profesor pretende transmitirles. Voy a dedicar algunos párrafos a analizar esta dificultad de aprendizaje, centrándome en tres aspectos destacados: La comprensión de las letras, el significado del signo = y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones.

Una investigación realizada en Inglaterra (Hart, 1981) es la primera que da una respuesta concreta y detallada al problema de la interpretación de las letras por los estudiantes. Desde entonces se han realizado numerosos estudios en diferentes contextos geográficos, socio-culturales, educativos, etc. cuyos resultados corroboran los obtenidos en dicha investigación. Podemos resumirlos diciendo que, al manejar expresiones algebraicas, los estudiantes perciben las letras con varios significados diferentes, que reflejan un progreso en su comprensión, hasta llegar finalmente a una comprensión matemáticamente correcta. Estos significados son:

1) Letras evaluadas. Presente sobre todo en los estudiantes que empiezan a tomar contacto con las letras, consiste en considerarlas como marcas de las posiciones de números concretos. Esta interpretación tiene mucho que ver con esos ejercicios de aritmética, tan frecuentes, en los que se pide poner el número apropiado dentro del cuadrado en expresiones como $3 + \square = 8$. Análogos suyos algebraicos pueden ser:

- ¿Cuánto vales a en $3 + a = 8$?
- ¿Cuál es el valor de $5a + 3$ si $a = 2$?

La reacción lógica de los estudiantes es pensar que el cuadradito de $3 + \square = 8$ ha sido sustituido por la letra de $3 + a = 8$, pero que el ejercicio sigue siendo en mismo, por lo que transfieren el significado del cuadradito a la letra. Por lo tanto, a la letra no se le da el significado de número genérico ni de variable, sino de marca que indica la posición de un número específico.

2) Letras ignoradas. Cuando se empiezan a plantear otros tipos de problemas que originan expresiones algebraicas más complejas, el significado anterior tiende a desaparecer. Entonces los estudiantes pueden llegar a una situación de uso de las letras sin dotarlas de ningún significado, o de ignorancia total de las mismas cuando transforman las expresiones algebraicas. Esta interpretación suele estar fomentada por ejercicios en los cuales se plantean operaciones que se pueden resolver sin utilizar realmente las letras. Por ejemplo:

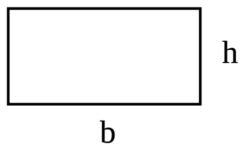
• Si $x + y = 42$, entonces $x + y + 6 = \ldots$

• Si $3x + 10 = 5x + 4$, entonces $3x + 2y + 10 = \ldots$

Para resolver correctamente estos ejercicios, los estudiantes sólo deben reconocer que hay que sumar la misma cantidad a ambos lados del signo =, por lo que deben sumar 6 al 42 y deben añadir $+ 2y$ en el término de la derecha. Aquí, las letras son simplemente unos objetos que no tienen por qué significar nada en particular y que no hay que manipular en absoluto. Es una comprensión de las letras muy poco útil y que hay que evitar en lo posible, para lo cual es recomendable no plantear ejercicios como los anteriores.

3) <u>Letras como objetos</u>. Esta interpretación consiste en considerar las letras como una abreviatura del nombre de un objeto, o como el objeto mismo. Por ejemplo:

• Calcular el área del rectángulo de la figura.

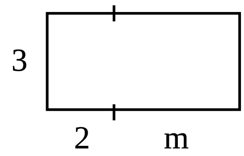


• Simplificar la expresión: $2x + 3y + 4x - y$.

Para estos estudiantes, en el primer ejemplo las letras representan los lados del rectángulo y la expresión resultante ($A = b \times h$) no es más que una forma abreviada de escribir que "el área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura". En el segundo ejemplo, las letras son unos objetos en sí mismas, que los estudiantes manejan, agrupando por una parte todos los términos que llevan la x y por otra parte todos los que llevan la y. Por lo tanto, ahora la x y la y no tienen ningún significado concreto. Esta interpretación de las letras como objetos ya empieza a ser útil para formar el concepto matemático, pues permite a los estudiantes manejar determinadas expresiones algebraicas comprendiendo qué significa el ejercicio propuesto y qué tienen que hacer.

4) <u>Letras como incógnitas específicas</u>. En este caso, una letra representa un número particular pero desconocido y los estudiantes pueden operar directamente con ella. Veamos unos ejemplos:

• Calcular el perímetro del rectángulo de la figura.



• Calcular el perímetro de un polígono de n lados si cada lado mide 2 cm.

Es importante diferenciar la primera interpretación (letras evaluadas) de ésta. En el primer caso, las letras representan números concretos, determinados, que pueden o deben colocarse en la posición de las letras, mientras que ahora las letras representan números indeterminados. En los ejemplos del primer caso, las letras tenían sólo un valor posible, mientras que, en los ejemplos anteriores, m puede ser cualquier longitud y n puede ser cualquier número natural. Por lo tanto, estos estudiantes entienden que para cada letra hay un conjunto (finito o infinito) de números, cualquiera de los cuales puede ponerse en el lugar de la letra.

Los dos ejemplos anteriores son bastante parecidos, si bien el segundo de ellos es más abstracto ya que un polígono de n lados no se puede dibujar, sino que habría que dibujar un polígono de una cantidad concreta de lados, lo cual particularizaría el problema. Por el contrario, en el primer ejemplo sí se puede dibujar la longitud m, la cual, por supuesto, toma un valor concreto en el dibujo, pero este valor no tiene importancia porque no se mide para calcular el resultado. Entonces, el tipo de problemas del primer ejemplo generalmente es más fácil de interpretar y resolver por los estudiantes que el segundo.

5) Letras como números generalizados. Ahora las letras pueden representar varios valores numéricos desconocidos y no uno sólo. Por ejemplo:

- Calcular los valores de n para los que se verifica que $3n + 1 < 19$.

A diferencia de los casos anteriores, en particular el 4, en los que una letra se interpretaba como sustituta de un número (aunque a veces eran varios los números que se podían utilizar), ahora una letra se entiende como sustituta de un conjunto de números, de manera que la letra no es una abreviatura del número, sino del propio conjunto.

6) Letras como variables. Este es el significado matemático estándar, donde las letras representan conjuntos indeterminados de números, de manera que hay una relación concreta entre los diferentes conjuntos que aparecen en la misma expresión algebraica. Por ejemplo:

- ¿Qué es mayor, $2 + n$ ó $2n$?

- El área de un rectángulo es de 24 cm^2. ¿Cuánto miden sus lados?

Naturalmente, también son ejemplos de esta interpretación las funciones en sus formas habituales de $y = f(x)$, $f(x,y) = c$, etc.

Los dos ejemplos anteriores presentan dos formas diferentes de aparecer las variables: Una sola variable o varias variables relacionadas. La idea de variable se ve más claramente al manejar expresiones o problemas con varias variables, porque en ellos se aprecia el hecho de que se puede modificar libremente cualquiera de las variables pero, al dar un valor concreto a una de ellas, los valores de las demás variables quedan determinados (o por lo menos limitados). En el tipo de problemas del primer ejemplo esto es más difícil de reconocer porque, al haber una sola variable, su significado se puede confundir con el de letras como números generalizados, ya que los estudiantes pueden resolver el problema dándole a n los valores que quieran y comparando las dos expresiones.

El planteamiento y el análisis didáctico de estas distinciones de los significados que los estudiantes dan a las letras ha hecho avanzar mucho el trabajo de los profesores en la enseñanza del álgebra, pues les ha permitido comprender mejor por qué sus alumnos contestaban de la manera que lo hacían. El objetivo de esta clasificación no es sugerir a los profesores que presenten a sus alumnos todos estos significados para que los aprendan, pues los profesores tienen que ofrecer a los estudiantes sólo los significados matemáticamente correctos. Pero si, cuando un estudiante contesta de una determinada manera, el profesor puede identificar esa respuesta con uno de los tipos mencionados, entonces sabe cómo tiene que entender la respuesta y qué puede hacer para que mejore la comprensión de sus alumnos, ya que la manera de abordar a un estudiante que dé respuestas del primer tipo es muy diferente a como tratar a otro cuyas respuestas correspondan, por ejemplo, al cuarto tipo.

Si las letras son uno de los elementos básicos del álgebra, las ecuaciones son otro de ellos. En el aprendizaje de la resolución de ecuaciones, el signo = juega un papel central para la correcta comprensión de qué es resolver una ecuación y qué manipulaciones se pueden realizar con las ecuaciones para llegar a la solución.

En un párrafo anterior me refería a la tendencia de los estudiantes a generalizar a las variables, en las expresiones algebraicas, el significado de los huecos en las expresiones aritméticas. Esta tendencia es más acusada en lo referente al signo =, ya que éste aparece en las expresiones aritméticas desde el primer momento, por lo que los niños conocen perfectamente su significado en el contexto aritmético y, cuando aparecen las expresiones algebraicas, lo natural es pensar que el signo = sigue significando lo mismo.

• En las expresiones aritméticas, lo usual es que aparezcan una o varias operaciones a un lado del signo = (generalmente a la izquierda) y en el otro lado tenga que aparecer el resultado de esas operaciones. Entonces, el primer significado que los estudiantes le suelen dar al signo igual en el álgebra es este mismo: El signo = enlaza una serie de operaciones aritméticas con su resultado. Por lo tanto, los estudiantes van a interpretar de la misma manera la expresión aritmética $5 + 7 = 12$ que la expresión algebraica $3x + 4 = 25$, pero van a tener dificultades serias para interpretar expresiones como $3x + 4 = 7x - 5$, porque aquí el signo = no puede ejercer ese papel de enlazar las operaciones con su resultado.

• Un segundo significado que tiene el signo = para los estudiantes es el de conectar dos expresiones en las que se deben realizar acciones similares: Lo que se haga a un lado del signo = se debe hacer también al otro lado. Esta interpretación suele proceder de la enseñanza en la cual los primeros contactos con el álgebra son transformaciones de ecuaciones para su resolución, para lo cual a los estudiantes se les enseñan reglas como que "lo que está sumando pasa restando", "si se resta una cantidad en un lado, hay que restar la misma cantidad en el otro lado", etc. En esta comprensión algorítmica, el signo igual tiene la misión de distinguir las dos partes con las cuales hay que hacer la transformación, es decir de barrera o de marca de separación, no la de indicar una equivalencia.

• Por último, el tercer significado que le atribuyen los estudiantes al signo = es el significado correcto de equivalencia entre dos expresiones algebraicas.

Con el primero de estos tres significados se plantea la ruptura con la aritmética, pues, como indicaba antes, es el que da lugar a algunas situaciones en las que sí se pueden resolver las ecuaciones aplicando los conocimientos de aritmética que tienen los estudiantes y a otras situaciones en las que las ecuaciones no se pueden resolver con esos conocimientos. Hemos visto que el problema surge porque los estudiantes manejan expresiones algebraicas que tienen la misma forma que otras expresiones aritméticas conocidas, por lo que transfieren el significado y los métodos aritméticos al álgebra. Aprovechando esta forma de proceder de los estudiantes, se puede hacer que éstos trabajen con expresiones aritméticas análogas a las expresiones algebraicas complejas que no pueden resolver mediante su experiencia previa. Por ejemplo, los niños están muy acostumbrados a expresiones como $2 \times 6 = 12$, formadas por una operación indicada y su resultado. Podemos trabajar con pares de expresiones de esta clase que dan el mismo resultado y escribirlas enlazadas. En los ejemplos siguientes se puede apreciar el proceso de transformación:

$2 \times 6 = 12 = 5 + 7$	$5 \times 4 - 11 = 9 = 3 \times 4 - 3$
$2 \times 6 = 5 + 7$	$5 \times 4 - 11 = 3 \times 4 - 3$
$2 \times \square = 5 + 7$	$5 \times \square - 11 = 3 \times \square - 1$

$2x = 5 + 7$ $\qquad\qquad$ $5x - 11 = 3x - 1$

En los primeros pasos se están manejando expresiones aritméticas, pero transformándolas para que el signo = pase a tener el significado que interesa en álgebra. En particular, el signo = adquiere el significado de equivalencia entre dos operaciones diferentes pero con el mismo resultado. En el último paso, ya se ha producido el paso al álgebra y a las ecuaciones, en las que el signo = tiene el significado correcto. Lo que es importante para facilitar la comprensión por los estudiantes es que este significado no viene inducido por el trabajo que se pueda haber hecho con las ecuaciones sino por el trabajo con las expresiones aritméticas.

Combinada con los dos aspectos que he comentado en los párrafos anteriores, se encuentra la problemática de lo que es propiamente aprender a resolver ecuaciones, es decir de comprender las razones de los sucesivos pasos de los algoritmos de resolución. Por supuesto, podemos enseñar a nuestros alumnos cómo resolver ecuaciones haciendo que memoricen las reglas de transformación y que resuelvan gran cantidad de ejercicios de cada tipo, pero es mucho mejor si, además, conseguimos que entiendan por qué funcionan como lo hacen esas reglas. Esta última forma de enseñar es a la que se tiende desde hace algunos años y en torno a la cual se han generado numerosas investigaciones cuyo objetivo común es determinar formas eficaces de aprendizaje comprensivo de los procesos de resolución de ecuaciones. Obsérvese que he escrito "aprendizaje comprensivo" y no "enseñanza comprensiva"; esto no hace más que poner el énfasis, una vez más, en la idea de que el elemento más importante del sistema educativo son los estudiantes y su actividad.

Sin embargo, con frecuencia, y de manera bastante independiente del método de enseñanza seguido, los profesores descubren que sus alumnos utilizan para resolver ecuaciones otras estrategias diferentes de las esperadas: El profesor espera que sus alumnos resuelvan las ecuaciones con los algoritmos que les está enseñando, pero ellos las resuelven utilizando los suyos personales, que han generado por sí mismos. Este es el caso de algunas de las estrategias de resolución de ecuaciones más frecuentes, que presento en los párrafos siguientes.

• Se suele empezar la enseñanza de la resolución de ecuaciones planteando ecuaciones sencillas, como $5 + x = 8$. Con este tipo de ecuaciones se pretende que los estudiantes las relacionen con la aritmética y que transfieran conocimientos de aritmética. En este caso, la forma usual de proceder de los estudiantes que inician el aprendizaje del álgebra es <u>recordar resultados numéricos</u> para averiguar qué número va en vez de la x.

• Otras veces, cuando la ecuación es un poco más compleja porque los estudiantes no tienen el dominio suficiente de las operaciones aritméticas, utilizan técnicas de conteo. Por ejemplo, en la ecuación $3x + 5 = 12$, muchas veces los estudiantes no realizan las transformaciones que el profesor espera (pasar el 5 al término de la derecha, etc.), sino que buscan la solución sustituyendo la incógnita por los valores 0, 1, 2, 3, … Esta forma de proceder está favorecida por las ecuaciones que se plantean cuando se empieza a trabajar en álgebra, cuyas soluciones generalmente son números enteros, lo cual facilita que los estudiantes puedan hacer ese tipo de cálculos.

• Una estrategia bastante frecuente con ecuaciones como la anterior es la de sustituir por tanteo mediante una aproximación más o menos organizada. Es decir, se da a la x un valor y se calcula el término de la izquierda; si el resultado es menor que el término de la derecha, se le da otro valor más grande y si el resultado es mayor, se le da a la x otro valor más pequeño, y así sucesivamente, hasta encontrar el valor exacto.

Muchas veces los profesores no reconocen las estrategias anteriores porque se limitan a mirar si el resultado dado es correcto o no, sin prestar atención al recorrido realizado por el estudiante. Por otra parte, dicho recorrido suele no estar explícito, porque se trata de operaciones de cálculo mental y en la libreta sólo se escriben el enunciado y el resultado final. Para entender estos procesos, lo importante es hacer que los estudiantes expliquen cómo han hecho para resolver las ecuaciones, más que ver si el resultado es el número correcto o uno equivocado.

• Otra estrategia, que frecuentemente aparece generada de forma autónoma por los estudiantes, consiste en interpretar una ecuación con una operación que se ha hecho y que luego se tiene que deshacer para llegar a los orígenes. En otras palabras, el estudiante debe trabajar hacia atrás desde la ecuación dada, interpretando cada operación que aparece en el enunciado como la inversa de otra, realizada previamente en el proceso hacia adelante. Veamos un ejemplo:

La ecuación $2x + 4 = 18$ significa que hay un número (x) que ha sido multiplicado por 2 y, después, al resultado se le ha sumado 4, siendo el valor final 18. Así pues, para resolver la ecuación, 1) se le quita 4 a 18, 2) se divide el resultado entre 2 y 3) el número que queda es el valor de x:

$$2x + 4 = 18$$
$$18 - 4 = 14$$
$$14 \div 2 = 7$$

$$x = 7$$

Es evidente que un estudiante que use esta estrategia está aplicando las reglas usuales de transposición de términos pero, realmente, no es éste el significado que le ha dado el estudiante a sus manipulaciones, sino el de realizar una secuencia de operaciones en el sentido contrario al de otra secuencia que se realizó previamente, cosa que no tiene nada que ver con el significado que nosotros le solemos dar a los hechos de transponer los términos o de realizar operaciones equivalentes a uno y otro lado del signo =.

En los cuatro casos anteriores, se trata de algoritmos que se pueden aplicar con comodidad a ecuaciones sencillas, en las que la incógnita sólo aparece en un término, pero que no son capaces de interpretar y resolver con eficacia otras ecuaciones con formas más complejas (aunque sigan siendo de primer grado). Las dos estrategias de resolución siguientes son válidas para cualquier ecuación y son las que los profesores de todo el mundo enseñan a sus alumnos como únicos métodos válidos para resolver ecuaciones.

- Una de las reglas clásicas que se enseñan y que todos los estudiantes son inducidos a memorizar es la correspondiente a la <u>transposición de términos</u>, que induce a cambiar los términos de sitio, juntando a un lado del signo = todos los términos que contienen la incógnita y al otro lado todos los que no la contienen, para después simplificar y cambiar también de término el coeficiente de la *x*, aplicando siempre las reglas de que cuando un término está sumando debe pasar al otro lado del signo = restando, …

- La otra regla clásica es la de <u>realizar la misma operación a ambos lados del signo =</u>, buscando siempre hacer la operación inversa de una que aparezca en la ecuación y siguiendo las mismas reglas que enunciaba en el párrafo anterior.

Un motivo por el que muchos estudiantes usan estas reglas de transformación de ecuaciones de forma incorrecta o no las utilizan en absoluto (o se resisten a hacerlo todo lo posible) es que no entienden su significado. Para resolver esta dificultad, a veces se trabaja con las ecuaciones en contextos físicos, en los cuales las ecuaciones se representan mediante estados de algún instrumento y las reglas de manipulación de términos corresponden a acciones realizadas sobre ese instrumento.

El contexto más común, que se puede ver con frecuencia en los libros de texto, es la representación mediante balanzas en equilibrio, donde cada brazo representa una de las expresiones a los lados del signo igual y las manipulaciones permitidas son únicamente aquéllas que mantienen el equilibrio. Por ejemplo, la balanza de la figura 5 representa la ecuación $2x + 3 = 3x + 1$.

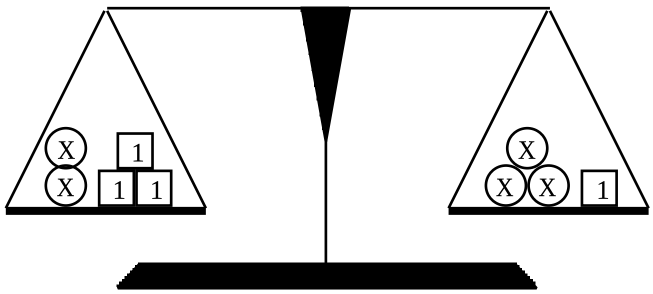


Figura 5.

A veces se presenta a los estudiantes una balanza real, con piezas de diversos pesos que representan los términos de la ecuación, en la que los estudiantes ponen o quitan piezas hasta conseguir averiguar el valor de la pieza incógnita. Otras veces estas balanzas están solamente dibujadas en papel pero, en todo caso, la familiaridad de todos los estudiantes con dicho instrumento hace que puedan manejarlo y, lo que es más importante, darle un significado a las reglas de manejo abstracto de los términos. Un defecto de esta representación es la dificultad para manejar términos que estén restando.

Otro contexto en el que se pueden representar las ecuaciones es el contexto geométrico, en el cual un producto de dos factores es el área de un rectángulo. Por ejemplo, el producto $5x$ se representa mediante un rectángulo cuya base mide 5 y cuya altura mide x, o al revés. Esta forma de hacer álgebra es más antigua que el álgebra misma, porque ya en los **Elementos** de Euclides se encuentran problemas como éste (Proposición 4 del Libro II; en Euclides, 1991):

"Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos."

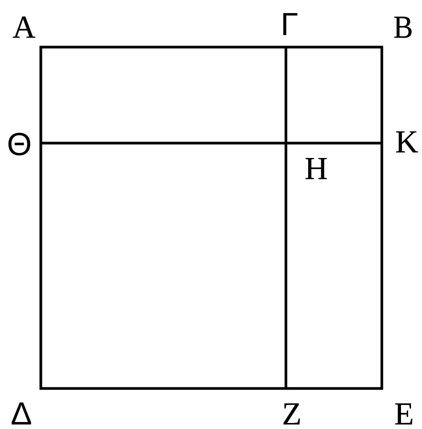


Figura 6.

Si traducimos este enunciado a nuestra terminología actual (por "línea recta" hay que entender segmento), podemos escribirlo de la siguiente manera (figura 6): $A B^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2\, A\Gamma \times \Gamma B$. O también de esta forma más conocida: $(A\Gamma + \Gamma B)^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2\, A\Gamma \times \Gamma B$.

Todos los estudiantes del mundo han

aprendido la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, pero para la mayoría de ellos se trata simplemente de un dato más, almacenado en la memoria pero carente de significado, porque nunca han visto un dibujo como el de la figura 6 ni han reflexionado sobre él. La memorización es un elemento necesario del aprendizaje de las Matemáticas, pero si, además de memorizar, los estudiantes captan el significado de la fórmula, podrán transferir este resultado a otras situaciones, por ejemplo a $(a + b)^3$, $(a + b + c)^2$, potencias de polinomios, etc., o, cuando les falle la memoria, tendrán un recurso alternativo para recordarla.

Expresiones como $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, etc. se pueden interpretar también mediante figuras parecidas a la anterior. Incluso si, en vez de dibujar en papel, se utilizan materiales manipulativos, es posible representar en 3 dimensiones (figura 7) expresiones cúbicas como $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

Esta forma de enseñanza del álgebra, particularizada a la interpretación geométrica de las ecuaciones de los tipos $ax + b = cx$ y $ax + b = cx + d$, se ha analizando con detalle en México por el equipo dirigido por E. Filloy y T. Rojano (ver Kieran, 1990), con la idea de introducir las ecuaciones y su forma de resolución a partir de problemas verbales en los cuales se puede hacer siempre una interpretación geométrica del enunciado, que al mismo tiempo sugiere la forma de resolver el problema. El siguiente enunciado es un ejemplo (Kieran, 1990):

"Una persona tiene un campo de A m. de ancho y x m. de largo. Esta persona compra un campo contiguo al anterior de B m^2 de área. Una segunda persona le propone intercambiar esta propiedad por otro campo próximo que tiene la misma área total y el mismo largo, pero con una forma mejor. ¿Cuál debe ser el largo de los campos para que el intercambio sea justo?"

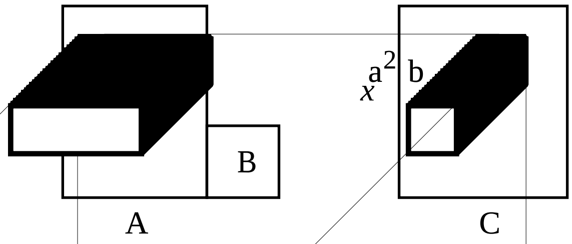


Figura 8. Representación de Ax + B = Cx.

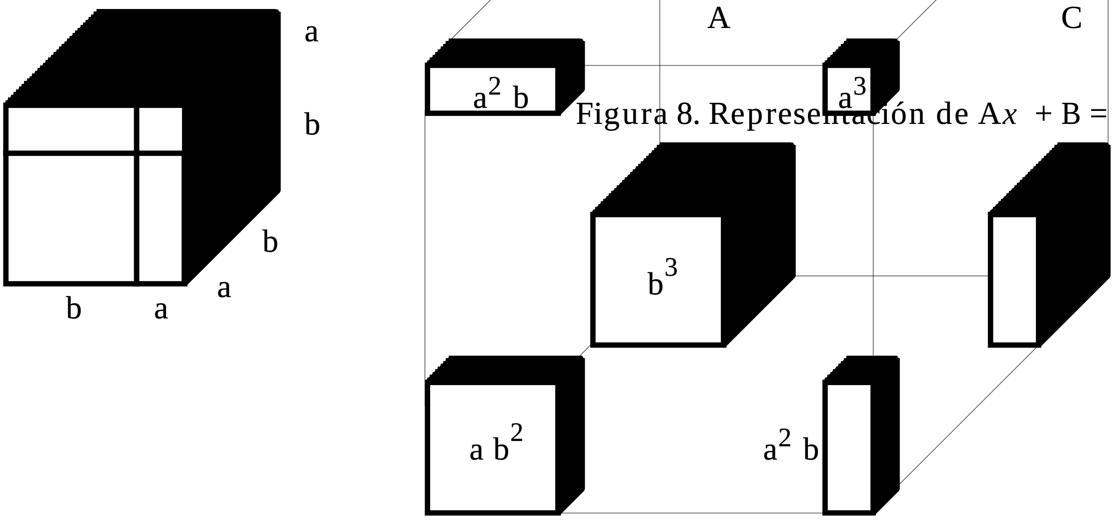


Figura 7. Representación de $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

Al sustituir las letras A, B y C por números, se obtiene un enunciado concreto de este tipo. La solución se obtiene representando gráficamente el problema (figura 8). El trabajo de los estudiantes es ir transformando las diferentes partes del texto en elementos geométricos. En el ejemplo, la primera parte del enunciado habla de un campo del cual se conocen las dimensiones, mientras que después se habla de otro campo del cual se conoce el área. Si se eligen los coeficientes de las ecuaciones con cuidado, se puede sugerir a los estudiantes que utilicen papel cuadriculado, pues solamente el hecho de dibujar las figuras correspondientes lleva al resultado, mediante un proceso de descomposición y de comparación de áreas.

Este tipo de enunciado puede parecer un poco complicado y largo, pero observando los resultados de las investigaciones se ve que hay muchas situaciones diferentes, que van desde enunciados muy sencillos hasta otros complejos, como puede ser el anterior. Así pues, con este contexto se pretende ayudar a los estudiantes para que aprendan a entender qué son las ecuaciones y a darle un significado a su resolución.

4. Referencias.

Carpenter, T.P.; Moser, J.M. (1983): The acquisition of addition and subtraction concepts, en *Lesh, R.; Landau, M., eds. (1983): Acquisition of mathematics concepts and processes* (Academic Press: N. York, EE.UU.), pp. 7-44.

Chevallard, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* (La Pensée Sauvage: Grenoble, Francia).

Euclides (1991): *Elementos. Libros I-IV.* (Gredos: Madrid, España).

Hart, K. (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (John Murray: Londres, G. Bretaña).

Kieran, C. (1990): Cognitive processes involved in learning school algebra, en*Nesher, P.; Kilpatrick, J., eds. (1990): Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Cambridge U.P.: Cambridge, G. Bretaña), pp. 96-112.

Platón (1970): *Menón.* (Instituto de Estudios Políticos: Madrid, España).